卷积 Convolution

卷积 锁定

本词条由"科普中国"百科科学词条编写与应用工作项目 审核。

在泛函分析中，卷积、旋积或摺积(英语：Convolution)是通过两个函数f 和g 生成第三个函数的一种数学算子，表征函数f 与g经过翻转和平移的重叠部分的面积。

如果将参加卷积的一个函数看作区间的指示函数，卷积还可以被看作是"滑动平均"的推广。

中文名	卷积	定 义	分析数学中一种重要的运算
外文名	Convolution	其 他	可以被看作是"滑动平均"的推广

目录

卷积 Convolution

A. 褶积(又名卷积)和反褶积(又名去卷积)是一种积分变换的数学方法,在许多方面得到了广泛应用。

B. 用褶积解决试井解释中的问题,早就取得了很好成果;而反褶积,直到最近,Schroeter、Hollaender和Gringarten等人解决了其计算方法上的稳定性问题,使反褶积方法很快引起了试井界的广泛注意。

C. 有专家认为,反褶积的应用是试井解释方法发展史上的又一次重大飞跃。他们预言,随着测试新工具和新技术的增加和应用,以及与其它专业研究成果的更紧密结合,试井在油气藏描述中的作用和重要性必将不断增大

卷积 Convolution

简单定义：卷积是分析数学中一种重要的运算。

设:$f(x)$,$g(x)$是R1上的两个可积函数，作积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$

可以证明，关于几乎所有的实数x，上述积分是存在的。这样，随着x的不同取值，这个积分就定义了一个新函数$h(x)$，称为函数f与g的卷积，记为$h(x)=(f*g)(x)$。

容易验证，$(f*g)(x)=(g*f)(x)$，并且$(f*g)(x)$仍为可积函数。这就是说，把卷积代替乘法，L1（R1）空间是一个代数，甚至是巴拿赫代数。

卷积 Convolution

卷积与傅里叶变换有着密切的关系。利用一点性质，即两函数的傅里叶变换的乘积等于它们卷积后的傅里叶变换，能使傅里叶分析中许多问题的处理得到简化。

由卷积得到的函数$f*g$一般要比f和g都光滑。特别当g为具有紧致集的光滑函数，f为局部可积时，它们的卷积$f * g$也是光滑函数。利用这一性质，对于任意的可积函数f，都可以简单地构造出一列逼近于f的光滑函数列fs，这种方法称为函数的光滑化或正则化。

卷积的概念还可以推广到数列、测度以及广义函数上去。

卷积 Convolution

卷积是两个变量在某范围内相乘后求和的结果。如果卷积的变量是序列x(n)和h(n)，则卷积的结果：

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(i)h(n-i)=x(n)*h(n)$$

其中星号*表示卷积。当时序n=0时，序列h(-i)是h(i)的时序i取反的结果；时序取反使得h(i)以纵轴为中心翻转180度，所以这种相乘后求和的计算法称为卷积和，简称卷积。另外，n是使h(-i)位移的量，不同的n对应不同的卷积结果。

如果卷积的变量是函数x(t)和h(t)，则卷积的计算变为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(p)h(t-p)dp=x(t)*h(t)$$

其中p是积分变量，积分也是求和，t是使函数h(-p)位移的量，星号*表示卷积。

卷积 Convolution

卷积定理

卷积定理指出，函数卷积的傅里叶变换是函数傅里叶变换的乘积。即，一个域中的卷积相当于另一个域中的乘积，例如时域中的卷积就对应于频域中的乘积。

$$F(g(x)*f(x)) = F(g(x))F(f(x))$$

其中F表示的是傅里叶变换。

这一定理对拉普拉斯变换、双边拉普拉斯变换、Z变换、Mellin变换和Hartley变换（参见Mellin inversion theorem）等各种傅里叶变换的变体同样成立。在调和分析中还可以推广到在局部紧致的阿贝尔群上定义的傅里叶变换。

利用卷积定理可以简化卷积的运算量。对于长度为n的序列，按照卷积的定义进行计算，需要做$2n-1$组对位乘法，其计算复杂度为；而利用傅里叶变换将序列变换到频域上后，只需要一组对位乘法，利用傅里叶变换的快速算法之后，总的计算复杂度为。这一结果可以在快速乘法计算中得到应用。